

Przedmowa

Niniejszy tom opracowany został w ramach projektu badawczego NCN nr 2015/17/B/HS1/02232 *Aksjomaty ekstremalne: aspekty logiczne, matematyczne i kognitywne*. Zawiera dwa eseje napisane w ostatnich kilku latach, przy czym pierwszy z nich powstał w trakcie realizacji projektu, natomiast drugi jest uzupełnioną i poprawioną wersją tekstu, który ukazał się przed rozpoczęciem projektu w internetowym czasopiśmie lingwistycznym (Pogonowski 2011).

Postulatyści amerykańscy. Omawiam prace niektórych matematyków amerykańskich, publikowane w trzech pierwszych dekadach XX wieku w *Transactions of the American Mathematical Society*. Prace te łączy to, że dotyczą one ustanawiania zestawów postulatów dla ważnych teorii matematycznych (przede wszystkim w algebrze i geometrii). Ich autorów zwykło nazywać się – za propozycją Johna Corcorana – *postulatystami amerykańskimi*. Najbardziej znanymi przedstawicielami tej grupy byli: Eliakim Hastings Moore, Edward Vermilye Huntington, Oswald Veblen oraz Leonard Eugene Dickson. Znako- mite omówienie niektórych ich dokonań zawierają artykuły: Scanlan 1991, 2003. W niniejszym tekście szczególną uwagę poświęcam tym aspektom prac owych matematyków, które wiążą się z problematyką jednoznacznego okre- ślenia modeli zamierzonych teorii matematycznych. Tematyka tego eseju oma- wiana była w następujących odczytach:

1. *Postulatyści amerykańscy*. LXII Konferencja Historii Logiki, Uniwersy- tet Jagielloński, Kraków, 25–26 października 2016.
2. *On the origin of metalogical notions: the case of American Postulate Theorists*. Logic and Cognition 2, Adam Mickiewicz University, Po- znań, 5–6 września 2016.

Matematyczne metafory kognitywistów. Dzielę się z czytelnikiem garścią uwag krytycznych na temat proponowanej przez niektórych kognitywistów (Lakoff i Núñez 2000: *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*) koncepcji *ucieleśnionej matematyki*. Wspomniani autorzy próbują zredukować genezę oraz uprawianie matematyki do konstruowania swoistych metafor pojęciowych. Czterdzieści lat temu za- proponowano ciekawą koncepcję tworzenia i funkcjonowania metafor pojęcio-

wych w lingwistyce (Lakoff i Johnson 1980: *Metaphors we live by*). Obecnie Lakoff i Núñez próbują stosować ową teorię metafor do analizowania twórczości matematycznej. Polemizuje z ich wizją *teorii ucieleśnionej matematyki* oraz z wysnuwanymi przez nich konkluzjami filozoficznymi. Niektóre z tych uwag krytycznych podawałem w Pogonowski 2011, 2012, 2017. Dodać wypada, że w ostatnich latach znajdujemy w literaturze przedmiotu bardzo zróżnicowane oceny propozycji Lakoffa i Núñeza: od entuzjastycznych po wielce krytyczne. Tematyka tego eseju omawiana była w następujących odczytach:

1. *Metafory pojęciowe w matematyce. 10 Polski Zjazd Filozoficzny*, Poznań, 15–19 września 2015.
2. *Pojęciowy obraz świata w matematyce. Konferencja Język, Kultura, Komunikacja*, Studium Języków Obcych Politechniki Opolskiej, Opole, 29 września 2014.
3. *Metafory poznawcze w matematyce. Seminarium Dydaktyki Matematyki Szkoły Wyższej*, Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN, Kraków, 24 października 2013.
4. *Matematyczne fantazje kognitywistów. Kolokwium Logiczne II*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, 14–15 czerwca 2013.
5. *Metafory matematyczne. 58 Konferencja Historii Logiki*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 23–24 października 2012.
6. *Geneza matematyki wedle kognitywistów. Seminarium Zakładu Logiki Stosowanej UAM*, Poznań, 23 listopada 2011.

Adresatami obu esejów są ci specjaliści nauk kognitywnych, którzy interesują się poznaniem matematycznym. Pierwszy esej dotyczy szczególnego okresu w historii matematyki, w którym metoda aksjomatyczna, obecna wcześniej właściwie jedynie w *Elementach* Euklidesa, zaczyna być podstawową metodą uprawiania matematyki. Od drugiej połowy XIX wieku coraz wyraźniejsze staje się traktowanie matematyki jako nauki o różnego rodzaju strukturach. Warto przy tym zwrócić uwagę na następujące odróżnienie. Pewne struktury matematyczne są wyróżnione i metoda aksjomatyczna miałaby scharakteryzować je w sposób jednoznaczny. Dotyczyło to liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych oraz systemu geometrii euklidesowej. Inne typy struktur, np. grupy, pierścienie, ciała, przestrzenie topologiczne, tworzą klasy, które miały być charakteryzowane jedynie ogólnie przez odpowiednie aksjomaty. Oba rodzaje takich charakterystyk obecne są

w omawianych w tym eseju pracach postulatystów amerykańskich, zwłaszcza Edwarda Huntingtona i Oswalda Veblena. Interesujące jest przy tym wyłączenie się pewnych pojęć metalogicznych, przede wszystkim kategoriowości oraz różnych odmian zupełności. Pojęcia te uzyskują precyzyjne sformułowania i badane są dokładniej dopiero nieco później, w pierwszej połowie XX wieku. O roli prac postulatystów amerykańskich w podstawach matematyki, zwłaszcza w odniesieniu do *aksjomatów ekstremalnych*, pisałem w Pogonowski 2019.

Drugi esej dotyczy sformułowanej w końcu XX wieku koncepcji matematyki ucieleśnionej, która miałaby, w zamierzeniu i deklaracjach jej twórców, wyjaśniać genezę i funkcjonowanie abstrakcyjnej matematyki. Przedstawiam główne założenia i twierdzenia tej koncepcji, ale większą część eseju poświęcam jej krytyce. Metafory pojęciowe dobrze tłumaczą szereg zjawisk obserwowanych na terenie lingwistyki, natomiast nie mają takiej samej mocy objaśniającej w obszarze matematyki, co staram się pokazać. Tworzenie metafor pojęciowych nie jest, w moim przekonaniu, głównym mechanizmem rozwoju matematyki. W dziejach tej dyscypliny obserwujemy nie tylko procesy tworzenia nowych pojęć wraz z ich charakterystyką na drodze dedukcyjnej, ale także procesy ustalania, co jest poprawną metodą badań matematycznych. Sądzę, że koncepcja matematyki ucieleśnionej nie zdaje adekwatnie sprawy z natury tych procesów. Genezę i funkcjonowanie matematyki można oczywiście próbować opisywać na gruncie filozofii, nauk kognitywnych lub nauk o kulturze, w każdym jednak przypadku nie wolno zapominać o specyfice myślenia matematycznego, które w odniesieniu do twórczości profesjonalnych matematyków rekonstruować możemy na podstawie analizy tekstów źródłowych. Wyjaśnienia wykorzystujące metafory pojęciowe mogą być użyteczne np. w dydaktyce matematyki oraz jej popularyzacji, które to aktywności należą nie do kontekstu odkrycia lub uzasadniania, lecz do kontekstu przekazu. Ten ostatni termin wprowadziłem w pracy Pogonowski 2016 (zob. także Pogonowski 2018 oraz rozdział 8 w Pogonowski 2019).

Już po oddaniu niniejszego tomu do druku zapoznałem się z książką Hohol 2020, prezentującą podstawy poznania geometrycznego z perspektywy nauk kognitywnych. Jej autor, który wcześniej dość entuzjastycznie odnosił się do propozycji Lakoffa i Núñeza, wskazuje tym razem na pewne istotne ograniczenia ich podejścia. Recenzję książki Hohol 2020 przedstawiam w Pogonowski 2021.

Dwa eseje zamieszczone w tym tomie dobrano na zasadzie kontrastu, jako przykłady odmiennych podejść do podstaw matematyki. Na temat różnych wizji takich podstaw istnieje olbrzymia literatura, lecz jej omówienie nie było

moim zamiarem w niniejszej pracy. Znakomitą analizę dwóch paradygmatów matematyki zawiera książka Batóg 2000. Rozróżniane przez Tadeusza Batoga paradygmaty to: Euklidesowy i logiczno-teoriomnogościowy. Ten pierwszy obowiązywał w matematyce do końca XIX wieku. Przeprowadzane w jego ramach rozumowania opierały się często na faktach uznawanych za oczywiste i wykorzystywały rysunki. Najważniejszą cechą następującego po Euklidesowym paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego jest uprawianie matematyki na drodze w pełni zaksjomatyzowanej.

Tadeusz Batóg zwraca uwagę, że na przejście od pierwszego do drugiego paradygmatu miały wpływ takie czynniki, jak: powstanie teorii mnogości oraz logiki matematycznej, arytmetyzacja analizy, opracowanie aksjomatycznych teorii systemów liczbowych oraz systemów geometrii. W ramach paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego w sposób wyraźny oddziela się składnię od semantyki, wykorzystuje się precyzyjnie zdefiniowane pojęcia dowodu oraz wynikania, odróżnia się teorię od metateorii. W tym paradygmacie możliwa stała się także refleksja metateoretyczna, ukazująca możliwości i obiektywne ograniczenia metody aksjomatycznej. Tadeusz Batóg uważa, że teoria kategorii, przez niektórych uznawana za kolejny nowy paradygmat matematyki, nie dokonała jednak w matematyce przełomu porównywalnego z tym, który dokonał się za sprawą logiki i teorii mnogości. Dodaje także, że współczesne koncepcje filozofii matematyki odwołują się przede wszystkim do paradygmatu logiczno-teoriomnogościowego. Pierwszy esej w tym tomie dotyczy badań prowadzonych właśnie w początkach tego paradygmatu, który dominuje również obecnie. Natomiast esej drugi dotyczy koncepcji, która w moim przekonaniu nie odegra znaczącej roli w rozważaniach nad podstawami matematyki. Nie jest ona paradygmatem w tym znaczeniu, o którym pisze Batóg. Jest koncepcją wobec matematyki zewnętrzną, próbującą analizować podstawy matematyki za pomocą pojęć i środków, które dobrze zdały egzamin w eksplicacjach lingwistycznych, ale które moim zdaniem nie oddają specyfiki genezy i funkcjonowania matematyki.

Różne wizje podstaw matematyki omawiane są także na gruncie poszczególnych stanowisk w filozofii matematyki, przedstawionych np. w znakomitej antologii Murawski 2002. Zarówno stanowiska dziś już klasyczne (logicyzm, formalizm, intuicjonizm), jak też nowsze (np. różne wersje empiryzmu) przedstawiają spójne poglądy na istotę matematyki, przy czym może ważniejsza od akceptowania całości takich poglądów jest analiza argumentacji przedkładanych w ramach tych stanowisk. Dla przykładu, w książce Davis i Hersh 1994 omawia się trudności, jakie klasyczne stanowiska w filozofii matematyki mają z eksplikacją pojęcia intuicji matematycznej.

Poglądy matematyków i filozofów dotyczące podstaw matematyki omawiane są również w monografiach dziejów matematyki (np. Kline 1972) oraz innych opracowaniach (np. Shapiro 2005). Ponieważ, jak już pisałem, nie było moim zamierzeniem prezentowanie w tym tomie stanu badań nad podstawami matematyki, uprzejmie zachęcam ewentualnego czytelnika do sięgnięcia do wspomnianych źródeł.

Praca nad niniejszym tomem odbywała się w życzliwej atmosferze badawczej panującej w Zakładzie Logiki i Kognitywistyki UAM. Uprzejmie dziękuję Dziekanowi Wydziału Psychologii i Kognitywistyki UAM, Panu prof. Mariuszowi Urbańskiemu za zgodę na finansowe wsparcie publikacji tomu ze środków Wydziału. Jestem też wdzięczny za profesjonalną pomoc udzielaną mi w administrowaniu projektem badawczym przez Panię: mgr Honoratę Helon i mgr Natalię Skrzypczak (zajmujące się na Wydziale obsługą administracyjną projektów), mgr Arletę Borowiak i mgr Sylwię Łuczyńską (Centrum Wsparcia Projektów UAM) oraz mgr Natalię Wojciechowską (Dział Księgowości i Kosztów UAM). Panu prof. Robertowi Sochackiemu bardzo dziękuję za istotne uwagi krytyczne przekazane w recenzji wydawniczej, a Panu redaktorowi Michałowi Staniszewskiemu za pomoc w redakcji tomu. Fotografia na okładce przedstawia Czarny Staw Gąsienicowy, w którym częściowo (w postaci ukruszonego zęba) pochowany jest autor tej książki.

Prace cytowane w przedmowie

- Batóg, T. (2000). *Dwa paradygmaty matematyki. Studium z dziejów i filozofii matematyki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.
- Davis, P., Hersh, R. (1994). *Świat matematyki*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Hohol, M. (2020). *Foundations of geometric cognition*. London and New York: Routledge.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- Lakoff, G., Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Murawski, R. (2002). *Współczesna filozofia matematyki*. Warszawa: PWN.

- Pogonowski, J. (2011). Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae* 23: 106–147.
- Pogonowski, J. (2012). Matematyczne fantazje kognitywistów. W: J. Juchnowski, R. Wiszniowski, redakcja, *Współczesna teoria i praktyka badań społecznych i humanistycznych*. Toruń: Wydawnictwo Adam Marszałek, Vol. 2, 117–127.
- Pogonowski, J. (2016). Kontekst przekazu w matematyce. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 8, 119–137.
- Pogonowski, J. (2017). On conceptual metaphors in mathematics. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 9: 85–98.
- Pogonowski, J. (2018). Intuitive explanations of mathematical ideas. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* 10, 123–137.
- Pogonowski, J. (2019). *Extremal axioms. Logical, mathematical and cognitive aspects*. Poznań: Wydawnictwo Nauk Społecznych i Humanistycznych UAM.
- Pogonowski, J. (2021). Poznanie geometryczne z kognitywnego punktu widzenia. Recenzja książki Hohol 2020. *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce* (w druku).
- Scanlan, M. (1991). Who were the American Postulate Theorists? *The Journal of Symbolic Logic* 56 (3): 981–1002.
- Scanlan, M. (2003). American Postulate Theorists and Alfred Tarski. *History and Philosophy of Logic* 24: 307–325.
- Shapiro, S., editor, (2005). *Philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press, 236–317.